

**RAYONNEMENT VERTICAL D'ANTENNES QUADRILATERES PLANES
EN RADIOFREQUENCE**

J.C.Jodogne

Extrait de : Revue HF Vol. IX N°5 1974

RAYONNEMENT VERTICAL D'ANTENNES QUADRILATERES PLANES EN RADIOFREQUENCE

Jean-Claude Jodogne

ABSTRACT. The performance of one or two straight wires resistance-terminated traveling-wave aerials of practical height and shape above a perfect flat earth are analysed. The analytic formulae are also obtained for the case of one or two catenaries (actual form of suspended wire) for the vertical direction of emission. The results of numerous runs of computer's program show the importance of geometrical parameters and enable us to find some good configurations for gain and band-pass.

Introduction

Les sondages ionosphériques à partir du sol sont généralement effectués par émission verticale de trains d'ondes de radiofréquence. L'emploi des antennes rhombiques est très répandu car ces antennes ont un bon gain(1). Mais elles présentent les inconvénients d'avoir une bande passante faible et de ne pratiquement plus émettre pour certaines fréquences.

La recherche du meilleur rapport signal/bruit et du gain le plus élevé pour une bande de fréquence la plus large possible a conduit aux antennes "log-périodiques" et "log-spiral" coniques(2). Ces dernières présentent des caractéristiques avantageuses pour l'émission en polarisation circulaire telles que large bande passante (2 à 20 Mhz), absence de lobes latéraux importants, impédance d'entrée sensiblement constante, mais le gain moyen reste cependant modeste (3 db en sus du gain du dipôle).

A partir des mâts et des émetteurs (non déphasables) existant à la station de Dourbes de l'IRM, est-il possible de réaliser des antennes planes présentant de bonnes caractéristiques de rayonnement (large bande passante, haut gain) ?

I.- Rappel et discussion du cas fondamental du rayonnement d'un fil rectiligne

Le champ électrique en un point M(R) situé à une grande distance R du fil dans la direction 2ϕ (Fig.1) est donné par l'intégration du champ dû au dipôle élémentaire sur la longueur L du fil (3). Avec λ pour longueur d'onde et $k = 2\pi / \lambda$, l'élément de champ est $dE_x = j 60\pi I_x \sin 2\phi \exp(-jkr) dx / \lambda r$ (l'élément de champ est perpendiculaire à la direction de propagation et situé dans le plan passant par M et le dipôle élémentaire). Si le courant est supposé de la forme $I_x = I_0 \exp(-jkx)$ c'est-à-dire sans atténuation, le champ direct est alors :

$$E_d = \int_0^L dE_x = j30k \sin 2\phi \int_0^L I_x \exp(-jkr) \frac{dx}{r}$$

$$\approx j \frac{30}{R} k I_0 \sin 2\phi \exp(-jkR) \int_0^L \exp(-jkx(1-\cos 2\phi)) dx$$

$$= \frac{30 I_0}{R} \frac{\sin 2\phi}{1-\cos 2\phi} \exp(-jkR) \left[1 - \exp(-j2kL \sin^2 \phi) \right]$$

la phase étant rapportée au point O.

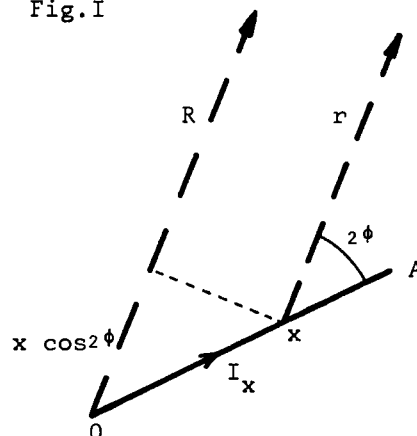
Comme $1 - \exp(-2jm) = 2j \sin m \exp(-jm)$ et $\lambda = c/f$

on a, si on pose $F = j \frac{60}{R} I_0 \exp(-jkR)$ et

$$a = 2\pi L \sin^2 \phi / c,$$

$$|E_d| = F \cotg \phi \sin a_f \left| e^{-j a_f} \right|$$

Fig. I

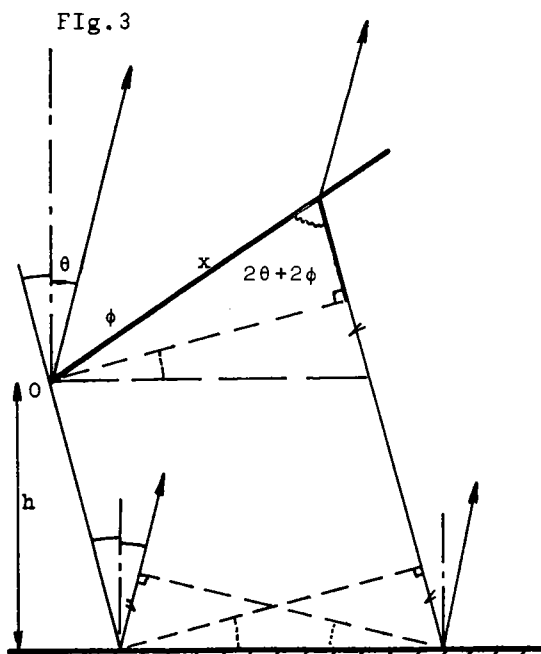
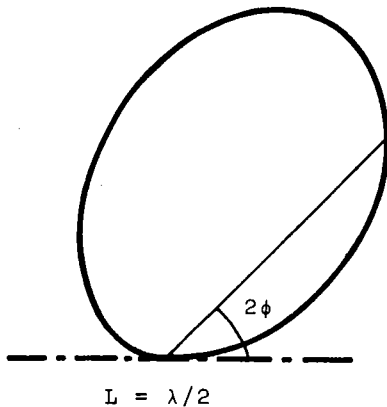


Nous remarquons d'emblée les résultats classiques: 1) la symétrie circulaire autour du fil (pour le module du champ direct uniquement !),

2) l'absence de rayonnement dans la direction du fil ($\sin 2\phi = 0$ et l'intégrale est finie).

Examinons le comportement du module du champ dû au rayonnement direct. La longueur du fil ainsi que la fréquence interviennent comme argument de la fonction sinusoidale. Doubler la longueur équivaut à doubler la fréquence. Pour une longueur et une fréquence déterminées ($L = \lambda/2$), le module du champ est représenté à la Fig. 2.

Fig. 2



Pour une direction et une longueur du fil données, le module du champ varie avec la fréquence comme $\sin a_f$; les maxima du module ont lieu pour

$$a_{f_M} = (2n+1)\pi/2$$

soit aux fréquences $f_M = (2n+1)c/4L\sin^2\phi$ ou $f_M(\text{Mhz}) = (2n+1) \cdot 75/L\sin^2\phi$ (L en m)

La bande passante (définie à + ou - 3db autour du premier maximum) est donnée par la différence

$$BP = f_{3\pi/4} - f_{\pi/4} = (3-1)\pi/4a = \pi/2a = f_M^{1^{er}} (I^{er} \text{max.}).$$

Elle sera donc d'autant plus grande que la fréquence du premier maximum sera élevée c'est-à-dire pour des longueurs et des angles petits. Il peut donc y avoir intérêt à choisir deux petites antennes plutôt qu'une grande. Malheureusement, pour la direction d'émission verticale et les directions voisines, l'utilisation d'angles petits conduit à des hauteurs de mât central rapidement trop onéreuses.

Dans le tableau I sont reprises les valeurs de l'angle 2ϕ auxquelles correspondent une longueur L de fil d'antenne qui donne le premier maximum à 8 Mhz et de ce fait, une bande passante de 8 Mhz (4 à 12 Mhz) et un "minimum" à 16 Mhz.

Tableau I

L (m)	30	40	50	60	70	80
2ϕ (°)	68	58	51,4	46,6	43	40
p (m)	11,2	21,2	31,2	41,2	51,2	61,3

La dernière ligne du tableau donne la projection sur la verticale du segment d'antenne, en émission verticale c'est-à-dire la hauteur minimale du mât.

Réflexion sur le sol

L'énergie émise vers le sol est en partie réfléchi vers le haut. Examinons la contribution au champ dans la direction θ . La phase du champ émis en X est de nouveau repérée à partir du point O (fig 3) situé à une hauteur h (très petite par rapport à R). Elle est due à deux facteurs :

- i) le courant déphasé de $-kx$
- ii) l'espace parcouru qui est augmenté de $x \cos 2(\theta + \phi)$.

Il vient

$$dE_x = \frac{k F}{2} \sin(-2\theta - 2\phi) \exp(-jkx(1 + \cos 2(\theta + \phi)))$$

et

$$E_r = \frac{F}{2j} \frac{\sin 2(\theta + \phi)}{1 + \cos 2(\theta + \phi)} \left[1 - \exp(jkL(1 + \cos 2(\theta + \phi))) \right]$$

$$= F \operatorname{tg}(\theta + \phi) \sin a_+ f \exp(-ja_+ f)$$

$$\text{avec } a_+ = \frac{kL \cos^2(\theta + \phi)}{f} = \frac{2\pi L}{c} \cos^2(\theta + \phi)$$

En l'absence de mesure précise sur les conditions de réflexion à Dourbes (ou à l'endroit de la localisation des antennes en général), il est pratique de considérer le cas extrême de la réflexion parfaite sur le sol (supposé plan) en négligeant les pertes.

L'estimation des constantes du sol pour Dourbes (4) conduit d'ailleurs au même résultat c'est-à-dire la réflexion parfaite.

L'addition du champ direct et de la contribution du champ après réflexion sur le sol en tenant compte du changement de phase (-1) et du retard de phase introduit par le parcours $2h/\cos \theta$, donne le champ résultant

$$E = E_d + (-1) E_r \exp(-j \frac{2\pi f}{c} \frac{2h}{\cos \theta})$$

$$= E_d + (-1) E_r \exp(-j 2gf) \text{ avec } g = \frac{2\pi h}{c \cos \theta}$$

$$E = F \operatorname{cotg} \phi \sin a_- f \exp(-ja_- f) - F \operatorname{tg}(\theta + \phi) \sin a_+ f \exp(-j(a_+ + 2g)f)$$

En particulier,

- pour la direction verticale d'émission, on a

$$\theta = 0 \text{ et } a_+ = 2\pi L/c - a_-$$

et $E = F \operatorname{cotg} \phi \sin a_- f \exp(-ja_- f)$

$$- F \operatorname{tg} \phi \sin a_+ f \exp(-j(a_+ + \frac{4\pi h}{c})f)$$

On voit que le champ n'est pas donné par une expression très simple en fonction des paramètres physiques.

- Pour un fil horizontal, l'expression se simplifie car $\theta + 2\phi = \pi/2$

d'où $\operatorname{tg}(\theta + \phi) = \operatorname{cotg} \phi$ et $a_+ = a_-$.

Le champ est alors donné par

$$E = E_d (1 - \exp(-j 2gf))$$

$$= 2j E_d \sin gf \exp(-j gf)$$

L'amplitude du champ résultant est simplement l'amplitude du champ direct multiplié par le facteur

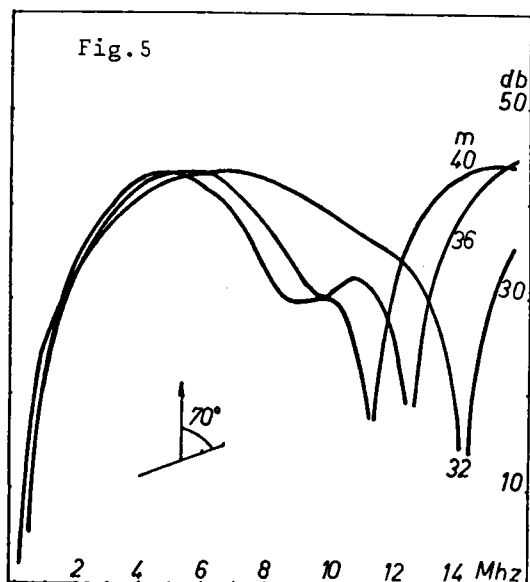
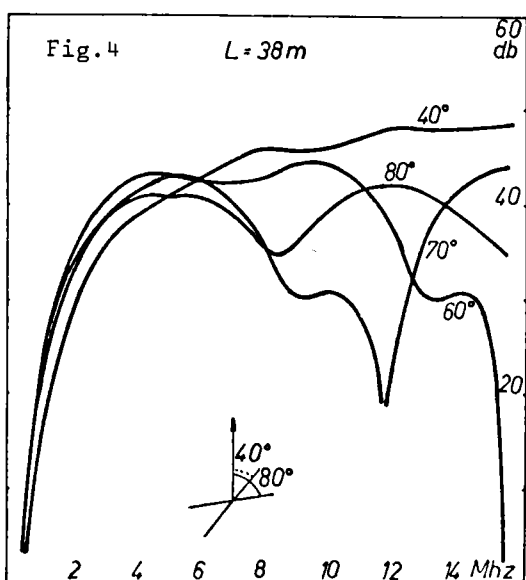
$$2 \sin gf \text{ avec } \theta = 0 \rightarrow \sin 2\pi h f/c$$

La discussion de la bande passante du cas du rayonnement direct doit être modifiée légèrement. En émission verticale, le facteur multiplicatif donne lieu à une atténuation du champ pour des valeurs de h inférieures à $c/12f$ ou des fréquences inférieures à $c/12h = 25/h$ (Mhz), mais à un gain pour des fréquences comprises entre $25h$ et $125/h$ (Mhz). On voit que pour une bande passante limitée supérieurement à 16 Mhz, il n'y a aucune difficulté à réaliser la condition $f < 125/h$ puisqu'il suffit que h soit inférieur à 7,8 m. Par contre, pour la limite inférieure, il n'est pas possible de satisfaire à la condition $f > 25/h$ car pour une hauteur de 10 m, la fréquence doit dépasser 2,5 Mhz. Or, dans le cas de sondages ionosphériques, il est nécessaire de sonder bien au dessous de cette fréquence. Il y a donc atténuation en début de bande et gain au-delà de la fréquence 25/h Mhz. Le gain maximum est de 6 db à la fréquence 75/h Mhz.

Dans le cas général (direction du fil quelconque), il n'est pas possible de procéder à une discussion semblable. La mise en programme pour ordinateur et les calculs effectués par la suite n'ont pas permis de tirer des conclusions générales sauf le fait que l'élévation du pied de l'antenne (augmenter h) étend la bande passante aux basses fréquences mais la détériore aux plus hautes fréquences.

- Cependant pour l'émission verticale,
- si on fixe la longueur L (38m par exemple), plus l'angle 2ϕ augmente, plus la bande passante et le gain maximum diminuent (fig.4),
 - si on fixe l'angle (par exemple 70°), plus la longueur augmente, plus la bande passante et le gain maximum diminuent (fig.5).

Les figures donnent la valeur du champ à une hauteur de 1km en db au-dessus de 1mV/m avec un courant d'antenne de 1A. Il en est de même pour les figures 8, 9, 10 et 11.

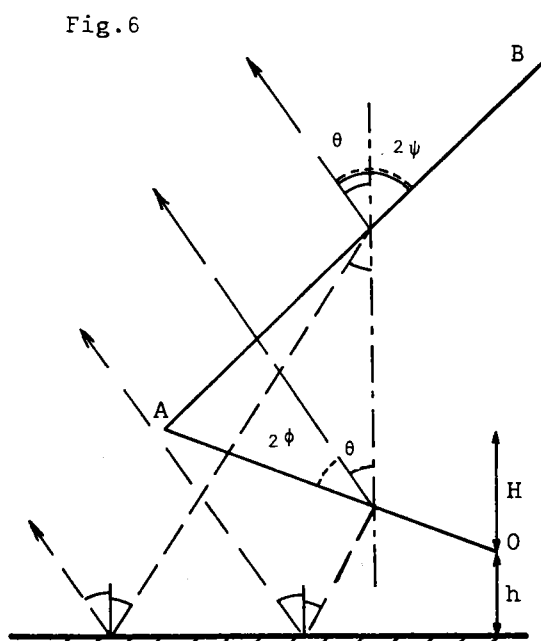


II. Cas de deux segments rectilignes quelconques.

Pour le deuxième segment, il faut tenir compte du retard du courant en A (fig.6) et de la phase dans l'espace, due à la position relative des segments, le point O servant toujours de référence et le courant circulant de O à B. Soient :

$$a_{1-} = \frac{2}{c} L_1 \sin^2 \phi; a_{1+} = \frac{2}{c} L_1 \cos^2(\theta + \phi)$$

$$a_{2-} = \frac{2}{c} L_2 \sin^2 \psi; a_{2+} = \frac{2}{c} L_2 \cos^2(\theta + \psi)$$



on a, pour les différentes contributions,

$$E_{1d} = F \cotg \phi \sin(a_{1-} f) \exp(-ja_{1-} f)$$

$$E_{1r} = F \tg(\theta + \phi) \sin(a_{1+} f) \exp(-ja_{1+} f)$$

$$E_{2d} = -F \cotg \psi \sin(a_{2-} f) \exp(-ja_{2-} f)$$

$$\exp(-jkL_1) \exp(+jk \frac{H}{\cos \theta})$$

retard avance
courant spatiale

$$E_{2r} = -F \tg(\theta + \psi) \sin(a_{2+} f)$$

$$\exp(-ja_{2+} f) \exp(-jk(L_1 + H/\cos \theta))$$

retard avance
courant spatiale

(le facteur -I devant les termes du deuxième segment provient de la position de ce dernier par rapport au premier) (rotation de 180° du champ). Pour le champ total, il vient

$$E_T = E_{1d} + E_{2d} - E_{1r} \exp(-j2kh/\cos \theta) - E_{2r} \exp(-j2k(h+H)/\cos \theta)$$

Le cas d'une antenne constituée par quatre segments rectilignes disposés symétriquement par rapport au mât central se ramène (dans le cadre des approximations utilisées) au cas de deux segments car le champ dû à la partie droite s'additionne en phase au champ de la partie gauche et lui est égal en module, à la condition d'avoir une alimentation d'antenne symétrique. Ceci est toujours le cas pratique.

La mise en programme pour ordinateur a été effectuée et une recherche systématique de la meilleure combinaison de longueurs (L_1, L_2), d'angles ($2\phi, 2\psi$) et de hauteur de pied (h) n'a pas permis de dégager des conclusions générales si le domaine de fréquence est quelque peu étendu. Cependant, pour obtenir la plus grande bande passante, il semble que le choix le plus favorable des longueurs soit celui pour lequel, à la fréquence la plus élevée du domaine fixé, le champ dû à n'importe quel segment pris isolément, soit constitué d'un seul lobe.

Cette conclusion est à rapprocher de celle du cas fondamental : on est amené à multiplier les petits segments d'antennes.

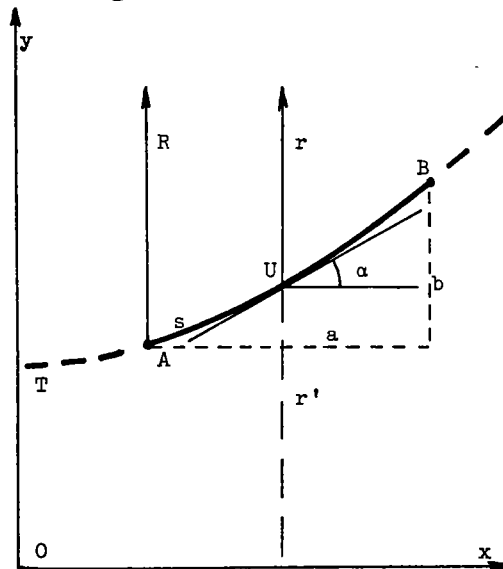
III.- Utilisation de la forme exacte du fil en émission verticale.

A. Antenne à un brin

La forme exacte que prend un fil d'antenne suspendu entre deux points fixes n'est pas un segment de droite mais une portion de courbe appelée chaînette (fig.7). Les équations cartésienne et paramétrique de la chaînette sont, avec le système d'axe de la figure :

$y = C \operatorname{ch} x/C$ où $C = OT$, distance minimale à l'axe x .

Fig.7



$s = C \operatorname{tga} \alpha$ où s est la longueur d'arc comptée à partir du point T et α l'angle de la tangente avec l'axe x .

De ces équations, on tire :

$$s = C \operatorname{Sh} x/C \quad \text{et} \quad y = C/\cos \alpha$$

Le champ émis par le dipôle élémentaire situé en $U(s)$ (fig.7) et reçu en un point $M(R)$ très éloigné dans la direction verticale ($2\phi = \pi/2 - \alpha$) est donné par

$$dE_s = j \frac{60 \pi}{\lambda R} \sin(\pi/2 - \alpha) I_s \exp(-jkr) ds$$

ou en tenant compte de

$$I_s = I_A \exp(-jk(s-s_A)) \quad \text{et de}$$

$$\exp(-jkr) = \exp(-jk(R - y + y_A))$$

$$dE_s = j \frac{60 \pi I_A}{\lambda R} \exp(-jk(R+y_A-s_A))$$

$$\cos \alpha \exp(-jk(s-y)) ds.$$

Le champ rayonné directement par le brin AB de longueur $L = s_B - s_A$ est alors

$$E_d = \int_{s_A}^{s_B} dE_s = kG \int_{s_A}^{s_B} \cos \alpha \exp(jk(y-s)) ds.$$

$$\text{avec } kG = j \frac{60 \pi I_A}{\lambda R} \exp(-jk(R+y_A-s_A))$$

Après quelques transformations (voir appendice I), on arrive à l'expression

$$E_d = -kGC \int_{kCt_A}^{kCt_B} \frac{\exp(jkCt)}{t} dt$$

$$= -kGC \left[\operatorname{Ei}(jkCt) \right]_{kCt_A}^{kCt_B}$$

L'intégrale du second membre est liée à l'intégrale cosinus

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos v}{v} dv$$

et à l'intégrale sinus (5)

$$Si(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin v}{v} dv$$

par

$$Ci(kCt_A) - Ci(kCt_B) = - \int_{kCt_A}^{kCt_B} \frac{\cos(kCt)}{t} dt \text{ et}$$

$$Si(kCt_A) - Si(kCt_B) = - \int_{kCt_A}^{kCt_B} \frac{\sin(kCt)}{t} dt$$

On obtient finalement

$$E_d = kGC \left[\underbrace{Ci(kCt) + jSi(kCt)}_{E_i(kCt) + j\frac{\pi}{2}} \right]_{kCt_B}^{kCt_A}$$

Le pas des tables de valeurs dont nous disposons est trop petit pour notre usage. Il a donc été nécessaire d'utiliser une méthode de calcul des valeurs de Ci et de Si. Nous avons adopté celle qui fait usage des fonctions auxiliaires pour assurer une convergence rapide au développement en série et qui est décrite dans le Handbook of Mathematical Function (6).

Réflexion au sol

L'angle du dipôle élémentaire avec la verticale est cette fois $\alpha + \pi/2$ donc

$$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$$

La phase repérée par rapport à celle du point A est due à deux facteurs :

- i) le courant déphasé de $-k(s-s_A)$
- ii) l'espace parcouru qui est augmenté de

$y-y_A$ soit un retard de phase de $k(y-y_A)$

Dans la limite des hypothèses adoptées précédemment, on a

$$dE_s = j \frac{60\pi I}{\lambda r} A \exp(-jk(R-y_A-s_A)) \cos \alpha \exp(-jk(y+s)) ds$$

$$E_r = \int_{s_A}^{s_B} dE_s$$

$$= kG \exp(2jky_A) \int_{s_A}^{s_B} \cos \alpha \exp(-jk(y+s)) ds$$

$$= kGC \exp(2jky_A) \left[Ci(u) - jSi(u) \right]_{u_A}^{u_B}$$

où $u = (y+s)/C = \lambda/t$ (voir appendice II).

Considérons à nouveau la réflexion sur un sol parfait :

la contribution au champ total sera

$$- E_r \exp(-2jkh).$$

Champ total

Le champ total est donné par

$$E_T = E_d - E_r \exp(-2jkh)$$

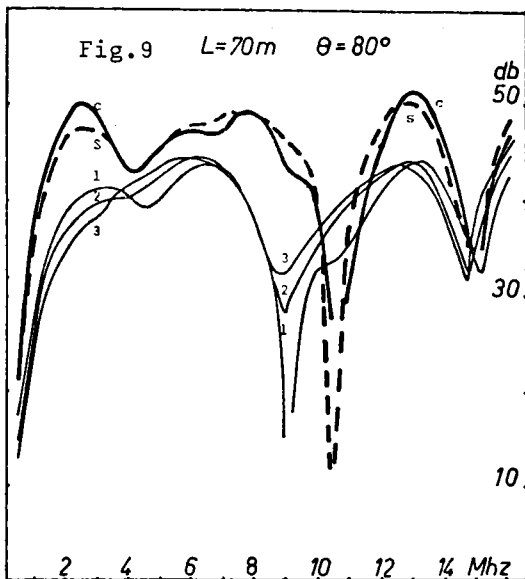
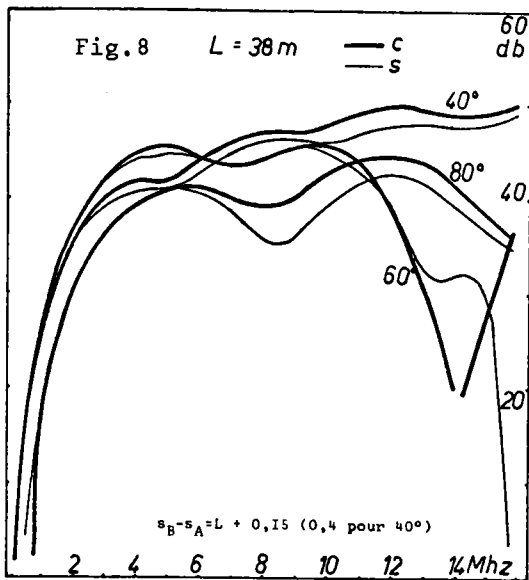
$$= kGC \left[\underbrace{Ci(kCt) + jSi(kCt)}_{E_i(kCt) + j\frac{\pi}{2}} + \exp(2jk(y_A-h)) \cdot \underbrace{(Ci(kCu) - jSi(kCu))}_{E_i(kCu) - j\frac{\pi}{2}} \right]_B^A$$

$$\text{où } kG = \frac{30 k I_A}{R} j \exp(-jk(R+y_A-s_A)).$$

La détermination des paramètres C, y_A, t_A et t_B de la chaînette est effectuée dans l'appendice III, à partir des éléments relatifs aux points d'attache A et B.

La mise en programme de ce calcul et la comparaison des résultats à ceux obtenus par un segment de droite permettent de constater que l'influence de la chaînette est loin d'être négligeable (fig.8, 60°).

Cette influence se fait sentir aussi bien dans les basses fréquences que dans les hautes fréquences.



Les noeuds de rayonnement sont déplacés. Les maxima peuvent être plus grands ou plus petits (fig. 8, 80°).

Plus la chaînette est tendue, plus le rayonnement se rapproche de celui d'un segment de droite. (fig. 9, courbes 3, 2 et 1).

B. Antenne à deux brins

Le seul point délicat à examiner est la phase relative des contributions des deux brins, en remarquant que les paramètres qui dépendent des chaînettes sont, bien sûr, différents (par exemple, C, t, u ...).

La phase relative (repérée par rapport à l'origine A du premier brin d'antenne) se déduit de trois facteurs dus :

i) au courant $I_S = I_C \exp(-jk(s' - s'_C))$

= $I_A \exp(jkL) \exp(-jk(s' - s'_C))$

= $I_A \exp(jk(s_A - s_B + s'_C)) \exp(-jks')$

ii) à l'espace parcouru

$\exp(-jkr) = \exp(-jk(r_C - y' + y'_C))$

= $\exp(-jk(R + y_A - y_B + y')) \exp(jky')$

iii) à la position relative des deux brins par rapport au sens du courant. Il en résulte un déphasage de 180° ou un facteur (-1).

La contribution directe a donc pour phase

$(-1) \exp(-jk(R + y_A - s_A)) \exp(-jk(s_B - y_B))$
 $\exp(-jk(y'_C - s'_C)) \exp(-jk(s' - y'))$

et la contribution réfléchiée

$(-1) \exp(-jk(R + y_A - s_A)) \exp(-jk(s_B - y_B))$
 $\exp(jk(y'_C + s'_C)) \exp(jk(y' + s'))$

Le facteur constant devant les signes intégrale du deuxième brin peut être exprimé en fonction de G par

$G' = G \exp(jk(-C't'_C - Ct_B))$ champ direct

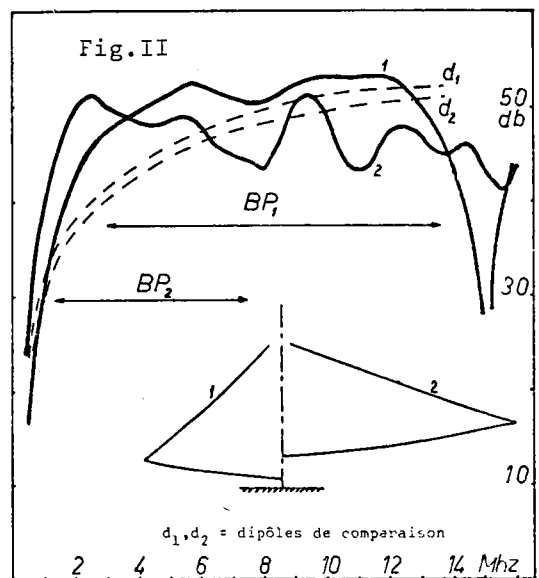
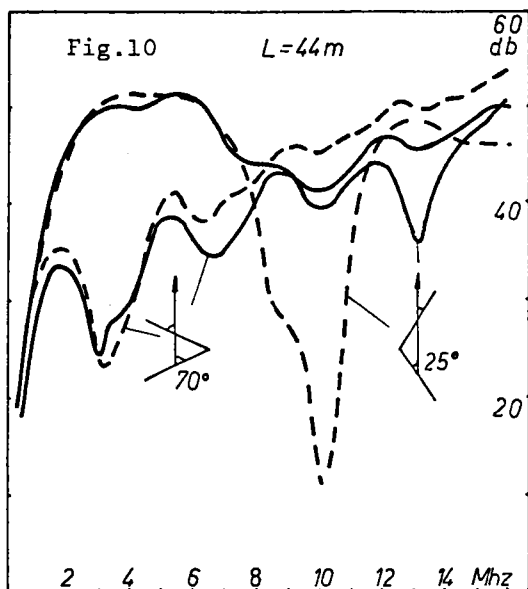
$G'' = G \exp(jk(C'u'_C - Ct_B))$ champ réfléchi

Le champ total dû aux deux brins s'exprime donc par

$E_T = E_{IT} + E_{2T} =$

$kGC \left[Ci + jSi + (Ci - jSi) \exp(2jk(y_A - h)) \right] \Big|_B^A$
 $- kGC' \exp(-jk(C't'_B - Ct_B))$

$\left[Ci + jSi + (Ci - jSi) \exp(2jk(y'_C - h - H)) \right] \Big|_D^C$



La combinaison de deux segments identiques (Fig.9, courbe s) pour former une demi-antenne rhombique est comparée aux deux arcs de chaînette (courbe c), arcs dont le rayonnement est donné par la courbe 3.

La figure 10 montre les résultats obtenus pour une distance de 44 m entre les points d'attache d'une antenne rhombique avec un angle $\theta = 25^\circ$ et 70° (courbe s segments de droite, courbe c arcs de chaînette).

En conclusion, nous voyons que le calcul du rayonnement des antennes envisagées est sensible aux paramètres physiques longueur et angle, mais également et de façon appréciable, à la chaînette que forme tout fil tendu entre deux points. La recherche des meilleurs paramètres ne peut malheureusement pas être guidée par des règles plus ou moins générales. Leur détermination nécessite donc de nombreux calculs. Cependant, le résultat obtenu par exemple à la figure II, montre que l'effort en vaut la peine; il permet en effet de couvrir avec une seule antenne la bande passante de 3 à 13,6 Mhz (ou de 1 à

7,3 Mhz), avec un gain moyen de 2,5 db (ou 5 db) au-dessus du dipôle (dans la bande passante) pour la courbe I (ou 2).

Il faut néanmoins se rappeler que les hypothèses de départ considèrent

- (i) le courant comme uniquement déphasé par le parcours dans le fil et négligent toute autre variation ;
- (ii) l'impédance terminale comme parfaitement accordée ;
- (iii) la réflexion sur le sol (plan) comme parfaite.

Une simulation du rayonnement des antennes par microondes permettrait de situer dans quelle mesure ces hypothèses sont admissibles.

Signalons que les programmes ont été écrits en Fortran IV et sont disponibles à l'IRM.

o
o o

APPENDICE I

Comme $s = C \operatorname{tg} \alpha$ et $y = C/\cos \alpha$, exprimons tous les facteurs de l'intégrant en fonction de $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\cos \alpha = I / \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I}$$

$$y - s = C(I/\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha) = C(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I} - \operatorname{tg} \alpha)$$

$$ds = C \operatorname{dtg} \alpha .$$

On obtient alors

$$E_d = kGC \int_{\operatorname{tg} \alpha_A}^{\operatorname{tg} \alpha_B} \frac{\exp(jkC(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I}))}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I}} \operatorname{dtg} \alpha$$

Si on pose $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I} = \operatorname{tg} \alpha + t$, on a

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I} = \frac{t^2 + 1}{2t}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - t^2}{2t}$$

$$\operatorname{dtg} \alpha = -\frac{t^2 + 1}{2t^2} dt; \quad y - s = Ct$$

et l'intégrale devient :

$$E_d = kGC \int_{t_A}^{t_B} \frac{2t}{t^2 + 1} \left(-\frac{t^2 + 1}{2t^2} \right) \exp(jkCt) dt$$

$$= kGC \int_{t_A}^{t_B} \frac{-\exp(jkCt)}{t} dt$$

APPENDICE II

Comme pour l'intégrale précédente, on pose

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I} = u - \operatorname{tg} \alpha \text{ et il vient}$$

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I} = (u^2 + I)/2u; \quad \operatorname{tg} \alpha = (u^2 - I)/2u$$

$$\operatorname{dtg} \alpha = (u^2 + I)/2u^2 du; \quad y + s = Cu.$$

De plus,

$$u = \operatorname{Sh}(x/C) + \operatorname{Ch}(x/C) = \exp(x/C)$$

$$\text{or } t = \operatorname{Ch}(x/C) - \operatorname{Sh}(x/C) = \exp(-x/C)$$

d'où $u = 1/t$

L'intégrale se transforme alors

$$E_r = kGC \exp(2jky_A) \int_{\operatorname{tg} \alpha_A}^{\operatorname{tg} \alpha_B} \frac{\exp(-jkC(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I} + \operatorname{tg} \alpha))}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + I}} \operatorname{dtg} \alpha$$

$$= kGC \exp(2jky_A) \int_{u_A}^{u_B} \frac{2u}{u^2 + I} \frac{u^2 + I}{2u^2} \exp(-jkCu) du$$

$$E_r = kCG \exp(2jky_A) \int_{u_A}^{u_B} \exp(-jkCu) \frac{du}{u}$$

$$= kGC \exp(2jky_A) \left[\operatorname{Ci}(kCu) - j\operatorname{Si}(kCu) \right]_{u_A}^{u_B}$$

APPENDICE III

Les grandeurs C , y_A , t_A et t_B sont liées à la chaînette et doivent être déterminées à partir des projections des distances des points d'attache sur les axes Ox et Oy et de la longueur L du fil d'antenne, soient

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= a \\ y_B - y_A &= b \quad \text{donnés.} \\ s_B - s_A &= L \end{aligned}$$

On dispose par exemple, des équations transcendantes

$$(1) b/C = \operatorname{Ch}\left(\frac{x_A + a}{C}\right) - \operatorname{Ch}(x_A/C) \text{ et}$$

$$(2) 1/C = \operatorname{Sh}\left(\frac{x_A + a}{C}\right) - \operatorname{Sh}(x_A/C) \text{ qui sont}$$

équivalentes à $b/2C = \operatorname{Sh}\frac{2x_A + a}{2C} \operatorname{Sh}(a/2C)$ ou

$$\operatorname{Sh} \frac{2x_A + a}{2C} = \frac{b}{2C \operatorname{Sh}(a/2C)} \quad (1')$$

$$1/2C = \operatorname{Ch} \frac{2x_A + a}{2C} \operatorname{Sh}(a/2C) \text{ ou}$$

$$\operatorname{Ch} \frac{2x_A + a}{2C} = \frac{1}{2C \operatorname{Sh}(a/2C)} \quad (2')$$

Elevons au carré, soustrayons (2') de (1')

puis multiplions par $4C^2 \operatorname{Sh}^2(a/2C)$, il vient

$$1^2 = b^2 = 4C^2 \operatorname{Sh}^2(a/2C)$$

$$\text{ou } \epsilon = \frac{\sqrt{1^2 - b^2}}{a} = \frac{\operatorname{Sh}(a/2C)}{a/2C} \quad (3).$$

L'équation (3) est une équation de la forme

$$\frac{\operatorname{Sh} z}{z} = \epsilon \quad \text{avec } z = a/2C$$

Comme ϵ sera toujours positif et voisin de un (égal à un si on a un segment de droite au lieu d'une portion de chaînette), on peut développer $\frac{\operatorname{Sh} z}{z}$ en série et limiter le développement au troisième terme soit :

$$\epsilon = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \quad \text{ou } z^4 + 20z^2 + 120(1 - \epsilon) = 0.$$

La solution positive est

$$z^2 = -10 + \sqrt{120\epsilon - 20} = 10(\sqrt{1,2\epsilon - 0,2} - 1)$$

$$z = \sqrt{10\sqrt{1,2\epsilon - 0,2} - 10}.$$

Le premier paramètre C est ainsi déterminé par

$$C = a/2z = a/\sqrt{40\sqrt{1,2\epsilon - 0,2} - 40}.$$

Pour la valeur de t_A , utilisons les relations

$$t = \frac{y-s}{C} = \operatorname{Ch}(x/C) - \operatorname{Sh}(x/C) = \exp(-x/C)$$

et cherchons l'exponentielle en divisant

(1) par (2), il vient

$$b/l = \operatorname{Th} \frac{2x_A + a}{2C} = \frac{1 - \exp(-(2x_A + a)/C)}{1 + \exp(-(2x_A + a)/C)}$$

ou $\exp(-(2x_A + a)/C) =$

$$(1-b)/(1+b) = \exp(-2x_A/C) \exp(-a/C) \text{ et}$$

$$t_A = \left(\frac{1-b}{1+b} \exp(a/C)\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{1-b}}{1+b} \exp(a/2C)$$

Exprimons $\exp(a/2C)$ par $\operatorname{Sh}(a/2C)$

$$= \epsilon z = \frac{\sqrt{1^2 - b^2}}{2C}$$

$$\exp(a/2C) = \operatorname{Ch}(a/2C) + \operatorname{Sh}(a/2C) =$$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{Sh}^2(a/2C) + 1} + \operatorname{Sh}(a/2C)}{\operatorname{Sh}(a/2C)} \left[1 + \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^{-2}(a/2C)} \right] =$$

$$\frac{\sqrt{1^2 - b^2}}{2C} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{-2z^{-2}}{\epsilon}} \right]$$

$$t_A \text{ devient } t_A = \frac{1}{2C} \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} (1^2 - b^2)$$

$$\left[1 + \sqrt{1 + \frac{-2z^{-2}}{\epsilon}} \right] = \frac{1-b}{2C} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{-2z^{-2}}{\epsilon}} \right]$$

L'expression de t_B s'obtient par définition :

$$t_B = \frac{y_B - s_B}{C} = t_A + \frac{b-1}{C}$$

Finalement, y_A et x_A sont donnés par

$$y_A = C \operatorname{Ch}(x_A/C) = \frac{C}{2} (\exp(x_A/C) + \exp(-x_A/C))$$

$$= \frac{C}{2} (u_A + t_A)$$

$$x_A = C \ln u_A.$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) *Wireless Engineer*, July 1951, p. 208. - Aperiodic aeriels use with vertical incidence ionospheric recorders, R. Bailey.
- (2) *IEEE Transactions on antennas and propagation*. Vol. AP 17, n° 5, Sept. 1969, p. 551. - An efficient moderate-size vertical incidence ionosonde antenna for 2-20 Mhz polarisation studies. F.J. Dietrich and R.K. Long
- (3) voir par exemple, P. Thourel, les antennes, Dunod.
- (4) voir par exemple Rhombic antenna design, A.E. Harper - D. Van Nostrand Company, N-Y.
- (5) voir par exemple les tables de fonction de Jahnke et Emde (Dover) ou celles d'intégrales, séries et produits de Gradshteyn et Ryzhik (Academic Press).
- (6) *Handbook of Mathematical functions*. Abramowitz et Stegun (Dover).